Diffusion dans un tuyau poreux

1. Ecrivons tout d'abord la variation dN du nombre de particules entre t et $t+dt$ entre x et $x+dx$ de deux manières différentes :

$$dN = \frac{\partial(nV)}{\partial t}dt = V\frac{\partial n}{\partial t}dt = 0$$

car le régime est stationnaire. Or cette variation correspond au nombre de particules entrant en x, moins le nombre de particules sortant en $x+dx$, moins celles sortant par la surface latérale, soit :

$$dN = j(x)Sdt - j(x+dx)Sdt - j_L 2\pi a dx dt$$

On en déduit, en utilisant la loi de Fick dans la paroi du tube caractérisée par un coefficient de diffusion D', $\vec{j}_L = -D'\frac{\partial n}{\partial r}\vec{u}_r$:

$$-\frac{\partial j}{\partial x}Sdxdt + D'\frac{\partial n}{\partial r}2\pi a dx dt = 0$$

Or d'après l'énoncé, on peut supposer que la densité moléculaire est linéaire dans le tube, de sorte qu'on peut écrire :

$$n(r) = \alpha r + \beta$$

En utilisant les conditions aux limites $\begin{cases} n(a+e) = 0 \\ n(a) = n(x) \end{cases}$, on obtient :

$$n(r) = \frac{n(x)}{e}[(a+e) - r]$$

Finalement, on en déduit :

$$\boxed{-\frac{\partial j}{\partial x}S - \frac{D'n(x)}{e}2\pi a = 0}$$

2. En utilisant une seconde foi la loi de Fick, mais dans le tube, suivant la direction longitudinale :

$$\vec{j} = -D\frac{\partial n}{\partial x}\vec{u}_x$$

on obtient :

$$DS\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{D'n(x)}{e}2\pi a = 0$$

Et en posant une distance caractéristique d telle que $d^2 = \frac{aeD}{2D'}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{n(x)}{d^2} = 0}$$

LA solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$n(x) = Ae^{\frac{x}{d}} + Be^{-\frac{x}{d}}$$

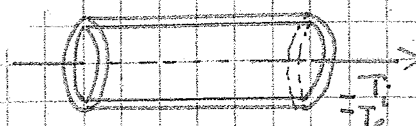
En utilisant les conditions aux limites, $\begin{cases} n(0) = n_0 \\ n_(L) = n_1 \end{cases}$, on obtient :

$$\boxed{n(x) = \frac{n_0 sinh\left(\frac{L-x}{d}\right) + n_1 sinh\left(\frac{x}{d}\right)}{sinh\left(\frac{L}{d}\right)}}$$

La distance d respréente donc la distance caractéristique de variation de la densité de particules $n(x)$. Si $L \ll d$, les pertes latérales deviennent négligeables et on obtient :

$$\boxed{n(x) = \frac{(n_1 - n_0)x}{L} + n_0}$$

Isolation thermique d'une canalisation



Λ conductivité thermique du manchon.

Régime stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ∀ t + sym cylindrique $/ \varphi, z$

1) $T(r, \varphi, z, t) = T(r)$

2) Pas de terme source $\left(- \oiint \vec{J}_Q \cdot \vec{n}\, dS = 0 \text{ avec } \vec{n} = \vec{e}_r \right)$

ou sous forme locale $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = 0 = \Lambda \Delta T + \sigma_u = \Lambda \Delta T + 0$

ρ masse volumique
u énergie interne massique
σ_u taux de production interne par unité de volume

3) Soit $\Delta T = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \iff r \frac{dT}{dr} = C$ ou $\frac{dT}{dr} = \frac{C}{r}$

primitives $T = C \ln r + C'$

Détermination de C et de C'

- Calcul de $\frac{dT}{dr}$: $\left\{ \begin{array}{l} T_i = C \ln r_i + C' \\ T_e = C \ln r_e + C' \end{array} \right\} \; T_i - T_e = C \ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)$

$\Rightarrow C = \frac{T_i - T_e}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)}$

soit finalement $\frac{dT}{dr} = \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)} \frac{1}{r}$; calcul de C' inutile

- Calcul de $T - T_i$: $\left\{ \begin{array}{l} T = C \ln r + C' \\ T_i = C \ln r_i + C' \end{array} \right. \Rightarrow T - T_i = C \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$

$(T - T_i) = \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$

4) Loi de Fourier $\vec{J}(r,t) = -\Lambda \,\overrightarrow{\text{grad}}\, T(r,t)$

avec Λ conductivité thermique

$$[\Lambda] = \frac{[\|\vec{J}\|]}{[\|\vec{\nabla} T\|]} = \frac{W m^{-2}}{K m^{-1}} = W K^{-1} m^{-1}$$

5) Calcul de la puissance thermique $\overline{I}$

$$\overline{I}_s = \frac{dU}{dt} = \oiint \vec{J_q} \cdot \vec{n}\, dS$$ ⚠ pas de signe ⊖ car flux sortant

$$= \oiint \Big(\underbrace{-\Lambda \frac{dT}{dr}\,\vec{e_r}}_{\vec{J_q}}\Big) \cdot \vec{e_r}\; r\, d\varphi\, dz$$

$$= -\Lambda \oiint \frac{C}{\cancel{r}}\, \cancel{r}\, d\varphi\, dz = -\Lambda C\, 2\pi L = -\Lambda 2\pi L \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_e}\right)} = \overline{I}$$

flux de charges électriques $\delta Q / \delta t$

6) Résistance thermique $(U = R I)$ $\overline{T_i - T_e} = R_{th}\, \overline{I}_s$

$$\Leftrightarrow R_{th} = \frac{(T_i - T_e)}{\overline{I}_s} = \frac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi L \Lambda}$$